$3p-4=2q-5 \Leftrightarrow 3p-2q=-1$

$\Leftrightarrow 2q-3p=1$ (D'après Bézout : $p \wedge q=1$)

$2q-3p=2\times2-3\times1$

$2(q-2)=3(p-1)$

3 divise 2 (q- 2) or $3 \wedge 2=1$

d'après le lemme Gauss : 3 divise q – 2 &

d'où : $q-2=3k$ où $k \in \mathbb{N}^*$ d'où $n=2(3k+2)-5=6k-1$

$S=\{6k-1$ où $k \in \mathbb{N}^*\}$

Solution 6 :

1°/ On a : Pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$:

$5n^3-n=(n+2)(5n^2-10n+19)-38$

$\Rightarrow$ PGCD (Sn^3-n , n + 2) = PGCD (n+2 ,38) (d'après l'algorithme d'Euclide)

2°/ n + 2 divise Sn^3-4 signifie

PGCD (Sn^3-n , n + 2) = n + 2 $\Leftrightarrow$ PGCD (n + 2 , 38) = n +2

$\Leftrightarrow$ n + 2 divise 38

or $D_{38}=\{1,2,19,38\}$

d'où $n \in \{-1,0,17,36\}$.

3°/ PGCD ($5n^3-n$, n + 2) = PGCD (n + 2 , 38) = d

donc d est un diviseur de 38

d'où d = 1 ou 2 ou 19 ou 38

4°/ $(5n^3-n) \wedge (n+2) = 19 \Leftrightarrow (n+2) \wedge 38 = 19$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n+2=19p \\ 38=19p \\ p \wedge q=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n+2=19p \\ q=2 \\ p \wedge q=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n+2=19p \\ \text{p entre relatif impair} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow n+2=19(2k+1)$ où $k \in \mathbb{Z}$

d'où $n=38k+17$

$S=\{38k+17 ; k \in \mathbb{Z}\}$